

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记30——无穷级数和收敛判定

希腊的哲学家芝诺曾经辩论说，一支箭永远不能达到它的目标。他说，首先箭要到达目标距离的一半，然后又必须到达剩余距离的一半，然后还有一半，这样就没有穷尽。因为这个旅程有无限个部分，所以箭要花费无限的时间才能结束这个旅程。这就是“芝诺悖论”。芝诺的结论是——时间是不存在的。尽管他自己也不相信这个结论。这个问题看似诡异，但在数学面前，神秘荡然无存，破解问题的关键就是无穷级数。

悖论的谜底

把芝诺问题用数学表达就是：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \quad n \rightarrow \infty$$

更普遍的写法是：

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n, \quad n \rightarrow \infty$$

其实很早就有人揭开了悖论的谜底，先将等号两边同时乘以a：

$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^\infty$$

$$aS - S = (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^\infty) - (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^\infty)$$

$$(a - 1)S = -1$$

$$S = \frac{1}{1 - a}, \quad (|a| < 1 \text{ and exist } S)$$

$$\text{when } a = \frac{1}{2}, \quad S = 2 = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow 1 = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n, \quad n \rightarrow \infty$$

所以芝诺问题的最终答案是1。需要注意的是，只有当 $-1 < a < 1$ 时上述公式才成立，否则结果将是发散的。

无穷级数

对于和几何级数类似的和式，用数学符号表示：

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

称 S_N 为部分和，当 $N \rightarrow \infty$ 时，和式就是无穷极限：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

无穷极限S的结果可能是收敛的，有可能是发散的。

无穷级数的收敛性

我们感兴趣的第一个问题是无穷级数的收敛性。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = ?$$

上式的收敛性没有那么明显，应当如何判断？

仔细观察上式会发现，它和黎曼和及其类似，如果 $\Delta x = 1$ ，那么

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \approx \int_1^N \frac{dx}{x}$$

需要注意的的，二者接近但并不相等，积分处理的是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 的情况。

对于黎曼和，如果当 $\Delta x = 1$ 时使用左矩形公式（数值积分可参考《[数学笔记19——数值积分](#)》），则：

$$\int_1^N \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} = S_N$$

如果使用右矩形公式，则：

$$S_N - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} < \int_1^N \frac{dx}{x}$$

综上：

$$S_N - 1 < \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N < S_N \Rightarrow \ln N < S_N < \ln N + 1$$

由于 $\ln N$ 是发散的，所以 S_N 也是发散的。

积分比较判别法

上面的例子展示了和式和积分的关系，这样描述“积分比较法”：如果 $f(x)$ 是减函数，且 $f(x) > 0$ ，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_1^{\infty} f(x)dx < f(1)$$

和式和积分的收敛性一致。

积分比较的基本思想就是用积分代替和式，因为和式通常很难计算，但和式对应的积分往往很容易，所以需要化繁为简，这也是数学的基本思想。

极限比较判别法

与积分比较类似，如果 $f(x)$ 等价于 $g(x)$ ，即 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)/g(x) = 1$ ，其中 $n > 0, f, g > 0$ ，则 $\sum f(x)$ 和 $\sum g(x)$ 的收敛性一致。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

比值判别法

当积分法和极限法出现困难时，比值法将是一个值得尝试的方案，对于 $\sum a_n$, $a_n > 0$ 来说，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

如果 $L < 1$, $\sum a_n$ 是收敛的；如果 $L > 1$ $\sum a_n$ 是发散的；如果 $L = 1$, 不能使用比值判别法。

示例

判断下面三个式子的收敛性：

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5-n^2}}$ 的收敛性？

a.使用积分判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{n^2} dn = 1 - \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 2$$

答案是收敛的，最终结果 ≈ 2

该求解过程也可以推广到 $f(x) = 1/n^m$

b.使用极限比较判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

结果是发散的。

c.使用极限比较判别法

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5-n^2}} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

结果是收敛的。

综合示例

示例1

判断下面三个式子的收敛性：

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+2}{n^3+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln}{n^2}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

a.使用极限比较判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+2}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

答案是收敛。

b.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

题目是几何级数，答案是发散。

c.使用极限比较判别法

$\ln n \ll n$, $\ln n/n^2 \ll 1/n$, 所以结果是收敛。

d.使用比值判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \times \frac{n3^n}{4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{3(n+1)} \right) = \frac{4}{3} > 1$$

答案是发散。

e.使用比值判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n^{10}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{10}}{(n)^{10}} \times \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10} < 1$$

答案是收敛的。

示例2

判断下面式子的收敛性：

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

a.使用积分判别法,

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

答案是发散

b.使用积分判别法,

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx$$
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\infty} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

答案是收敛的。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [无穷级数](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记29——反常积分和瑕积分](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记31——幂级数和泰勒级数](#)

posted on 2017-12-13 22:39

我是8位的

阅读(4880)

评论(0)

编辑

收藏

举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes